سلسلة 7

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 1 باك علوم رياضية

8 : المتتاليات العددية

01.

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}.$$

.1

أ- بين أن: $\forall n \geq 0 : u_n > \frac{3}{2}$.

ب- بين أن: (u_n) تناقصية.

.2 نضع $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{2}{2u_n - 3}$.

أ- بين أن المتتالية : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية وأساسها $\frac{2}{3}$.

ب- حدد الحد العام للمتتالية v_n ثم استنتج أن :

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

ج- أحسب المجموع: $S_n = \sum_{j=0}^{j=n} v_j$.

02.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب :

$u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.1

أ- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} ;\ 0 < u_n < 1$.

ب- أدرس رتابة (u_n) .

.2 نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n}{a + u_n}$ حيث a عدد حقيقي.

أ- حدد قيمة a لكي تكون (v_n) متتالية هندسية.

ب- نفترض أن : $a = -1$.

.1 حدد (v_n) بدلالة n .

.2 بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ;\ 0 < u_n < \frac{1}{3^n}$.

03.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و

و لكل $n \geq 2$ ؛ $u_n = \dfrac{3u_{n-1}u_{n-2}}{u_{n-2} + 2u_{n-1}}$. نعتبر المتتالية (v_n)

حيث : $\forall n \in \mathbb{N}^* ;\ v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

.1 بين أن : (v_n) هندسية.

.2 حدد u_n بدلالة n .

04.

لتكن (a_n) و (b_n) متتاليتين معرفتين بما يلي : لكل n من $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}.$$

نضع : $u_n = a_n + b_n$ و $v_n = a_n - b_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.1 بين أن : (u_n) متتالية ثابتة ثم حدد قيمتها .

.2

أ- بين أن : (v_n) هندسية ثم حدد عناصرها المميزة .

ب- أكتب (v_n) بدلالة n .

.3 حدد (a_n) و (b_n) بدلالة n .

05.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = -1$ و $u_1 = \frac{1}{2}$

و $\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

.1 أحسب u_2 و u_3 .

.2 نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ و $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

أ- بين أن : (v_n) متتالية هندسية و حدد عناصرها المميزة.

ب- بين أن : (w_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة.

ج- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

.3

أ- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,3\} ;\ 2n^2 \geq (n+1)^2$.

ب- برهن بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,3\} ;\ 2^n \geq n^2$.

.4 أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ;\ 0 < u_n < \frac{2}{n}$.